réf : haha | Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ (avec séries génératrices) | leçons : toutes les probas

Soient $p \in [0,1]$

$(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de v.a. i.i.d suivant une loi de Rademacher de paramètre p :

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = p \qquad \mathbb{P}(X_i = -1) = 1-p$$

On définit la marche aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Alors :

(i) si $p = \frac{1}{2}$: $\mathbb{P}(\limsup_n (S_n = 0)) = 1$

(ii) sinon : $\mathbb{P}(\limsup_n (S_n = 0)) = 0$

(i) Posons $T := \inf\{n \geq 0 \mid S_n = 0\}$ (tps du premier retour)

et les séries génératrices :
$$\begin{cases} P(x) = \sum_{n \geq 0} p_n x^n \\ Q(x) = \sum_{n \geq 0} q_n x^n \end{cases}$$

où :
$$\begin{cases} p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) \\ q_n = \mathbb{P}(T = n) \end{cases}$$

1. $P(x) = \sum \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ pour $x \in]-1, 1[$

- Comme S_n a même parité que n ; $p_{2n+1} = 0 \quad \forall n$
- p_{2n} : " monter $n \times$ et redescendre $n \times$ " : $\begin{cases} \binom{2n}{n} \text{ possibilités} \\ 2^{2n} \text{ chemins} \end{cases}$

donc $p_{2n} = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n}$ (équiprobabilité)

et $P(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$

$$\begin{cases} \arcsin x = \sum \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{4^n (2n+1)} \\ (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \dots \end{cases}$$

2. Exprimer Q grâce à un produit de Cauchy

si $n \geq 1$:

$$p_n = \mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(S_n = 0, T = k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\underbrace{X_{k+1} + \dots + X_n}_{\text{suit la m̂ loi que } S_{n-k}} = 0, T = k)$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} p_{n-k} q_k}_{n^e \text{ terme du p}^t \text{ de Cauchy } PQ}$$

car $\begin{cases} \text{suit la m̂ loi que } S_{n-k} \\ \perp\!\!\!\perp \text{ de } S_k \end{cases}$

donc $P(x) = 1 + P(x) Q(x)$

donc $Q(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$

(3) Calcul de $\mathbb{P}(T<+\infty)$ par continuité croissante

$$\mathbb{P}(T<+\infty) = \mathbb{P}(T\in\mathbb{N}) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{n=1}^{N} T=n}_{\text{suite croissante}}\Big) = \lim_{N} \mathbb{P}\Big(\bigcup_{n=1}^{N} T=n\Big)$$

Thm de cont. $\nearrow$

év^{ts} disjoints $\searrow$ $= \lim_{N} \sum_{1}^{N} \mathbb{P}(T=n)$

$$= \sum_{1}^{+\infty} q_n = Q(1^-) = 1$$

donc on revient en 0 presque sûrement en temps fini

mais comme si $S_k=0$, $X_{k+1}+\dots+X_n$ suit la même loi que S_{n-k},

on revient en 0 presque sûrement une infinité de fois :

$$\underline{\mathbb{P}(\limsup (S_n=0)) = 1}$$

ii Stirling + Borel-Cantelli $\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup(S_n=0))=0$

Cette fois, on a $\quad p_{2n} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!^2} p^n (1-p)^n$

et avec Stirling :

$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$p_{2n} \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{2\pi n}\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\left(\frac{e}{n}\right)^{2n} p^n(1-p)^n$$

$$= \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{\pi n}}$$

or $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow 4p(1-p) < 1$ donc la série CV (série géo)

donc $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n=0) = \sum p_{2n} \leq \frac{1}{1-4p(1-p)} < +\infty$

donc par Borel-Cantelli : $\quad \underline{\mathbb{P}(\limsup S_n=0) = 0}$